Chapitre 22 : Rang et représentation matricielle
Feuille d'exercices

Exercice 1 Donnez la matrice représentative dans les bases canoniques des applications linéaires (on ne demande pas de le redémontrer) dont la forme analytique est donnée par :

a) $f : (x, y, z) \mapsto x - y - 2z$

b) $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y, 2y - x)$.

c) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - z, y + 2z)$.

d) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$.

Exercice 2 Les matrices A ci dessous sont les matrices d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, exprimées dans les bases canoniques.

Précisez n et p et exprimez analytiquement l'application linéaire.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 Soit f une application linéaire. Exprimez f sous forme analytique dans les cas suivants :

a) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (2, 2)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 0)$

b) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $f(1, 1) = (3, -1, 0)$ et $f(1, -1) = (1, 2, -3)$.

Exercice 4

1. Pour chacune des applications linéaires de l'exercice 1, déterminez une base de l'image.
2. Ces applications sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Dans le cas bijectif, déterminez f^{-1}.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$.

Soit f définie sur E par $f(P) = P + (1 - x)P'$

1. Montrez que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminez son noyau.
3. Donnez sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, d'abord pour $n = 3$, puis pour n quelconque.

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ admettant pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer Ker f et en donner une base.

Exercice 7 Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{2x} \text{ et } f_3(x) = (3x + 1)e^{2x}$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.

1. Montrez que (f_1, f_2) constitue une base de E.
2. Soit ϕ l'application définie sur E par : $\forall f \in E$, $\phi(f) = f'$. Montrez que ϕ est un endomorphisme de E.

3. Donnez la matrice de ϕ dans la base f_1, f_2. On note A cette matrice.
4. Déterminez pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^n.
5. En déduire la dérivée $n$ième de f_3.

Exercice 8 Soit $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; x+y+z=0 \right\}$ et $F = \text{Vect}\,(-1,1,1)$.

1. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le projeté du vecteur $\vec{u} = (x,y,z)$ sur E parallèlement à F.
3. En déduire la matrice A de la projection p sur E parallèlement à F dans la base canonique.
4. Calculer A^2. Qu'observe-t-on ? Justifier.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x,y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \text{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \text{Ker}(s + Id_E)$.
4. On suppose que E est de dimension finie n, et on note $k = \dim(F)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n-k \text{ fois}}).$$

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ et f, l'application qui à tout polynôme P de E associe son reste dans la division euclidienne de P par x^2+1.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner sa matrice dans la base canonique de E.
3. Montrer que f est une projection.
4. Préciser F et G tels que f soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 11 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 non nuls tels que :

$$f(u_3) = -u_3 \qquad f(u_2) = u_3 - u_2 \qquad f(u_1) = u_2 - u_1$$

2. Montrez que u_1, u_2 et u_3 constituent une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminez la matrice B de f dans cette base.

Exercice 12 Soit f un endomorphisme défini sur un espace E de dimension 3, dont la matrice dans une base est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que $P(x) = x^2 + 2x - 3$ est annulateur de f.
2. En déduire que f est un automorphisme et préciser f^{-1} en fonction de f et de i_d.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par P.
4. En déduire A^n, et exprimez f^n en fonction de f, i_d et n.

Exercice 13 (Une première diagonalisation) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + 3b + 3c)x^2 + (2b + c)x - 2b - c.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$.
4. Montrer que f est le projecteur sur F parallèlement à G et préciser F et G.
5. Donner un polynôme annulateur de f.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.
7. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (Images et noyaux itérés d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \mathrm{Im}\, f^p$ et $N_p = \ker f^p$.

1. Montrer que $(I_p)_{p\geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p\geq 0}$ est croissante (au sens de l'inclusion).
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés. Montrer que
$$\forall s \geq r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r$$
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 15 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est M.
Soit $P_1 = x^2 - 1$, $P_2 = x^2 - x + 1$ et $P_3 = x^2 + x + 1$.
On note $V_1 = \mathrm{Vect}(P_1)$ et $V_2 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que f^3 est nul et en déduire un polynôme annulateur de f.
4. Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.
5. On veut déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.
   (a) Soit D une droite vectorielle stable par f. Montrer que $D = V_1$.
   (b) Soit Π un plan stable par f et $v = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \in \Pi$.
   Montrer que $\big(v, f(v), f^2(v)\big)$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $\Pi = V_2$.
   (c) Conclure.

Exercice 16 (autour de la trace) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un élément non nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On définit l'application trace par :

$$\mathrm{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \end{array}$$

Soit T l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

1. Montrer que Tr est une application linéaire.
2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) = 1$.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de T.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Vect}(A)$.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$.
   Montrer que T est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17 Soit p et q deux projecteurs définis sur un espace vectoriel E.

1. Montrer l'équivalence :

$$[p+q \text{ est un projecteur }] \Leftrightarrow [p \circ q = q \circ p = 0].$$

2. Prouver que lorsque $p+q$ est un projecteur, on a :
   (a) $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$,
   (b) $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 18 (Commutant d'un endomorphisme) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Justifier l'existence et l'unicité de $(p_0, \ldots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \cdots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0).$$

2. On pose $P = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \cdots - p_1 X - p_0$.
   (a) Montrer que P est un polynôme annulateur de u.
   (b) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que tout polynôme annulateur de u est un multiple de P.
3. On pose $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}[x]\}$.
   (a) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre. En déduire la dimension de $\mathbb{R}[u]$.
4. On note $\mathscr{C}(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. Montrer que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.

Exercice 19 (Difficile) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Il y a deux méthodes ici : intuiter le résultat puis faire le calcul, ou introduire la bonne application linéaire. Les deux sont intéressantes, mais toutes deux assez difficiles. Si vous avez le temps, cherchez les deux !